



کد فرم: FR/FY/11  
ویرایش: صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)  
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی: ریاضی  
نام و نام خانوادگی:  
امتحان درس: ریاضی ۱ (ریاضی)  
شماره دانشجویی:  
نیمسال (اول/دوم): ۱۳۹۲-۹۳  
تاریخ: ۱۳۹۲/۱۰/۱۹  
نام مدرس: سیدرضا موسوی  
وقت: ۱۳۵ دقیقه

توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.  
استفاده از هیچگونه ماشین حساب مجاز نمی باشد.  
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- الف) ریشه های معادله  $2x^2 + 5ix + 18 = 0$  را بیابید. ۱۰ نمره

ب) اگر  $z = 2 + 3i$ ، عبارت  $(\bar{z})^2 - \frac{1}{z}$  را به ساده ترین صورت بنویسید. ۱۰ نمره

سوال ۲- به کمک ارتباطی که بین تابع نمایی و توابع مثلثاتی وجود دارد نشان دهید که: ۱۵ نمره

$$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$$

سوال ۳- مقدار  $b$  را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه  $x = -4$  دارای ناپیوستگی برداشتنی باشد. ۲۰ نمره

$$f(x) = \begin{cases} -x^2[x] & x < -4 \\ 3x + b & -4 < x \end{cases}$$

سوال ۴- فقط یکی از حدهای زیر را محاسبه کنید: ۱۵ نمره

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{1392}}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

سوال ۵- نمودار تابع  $y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$  را رسم کنید. ۳۰ نمره

سوال ۶- تمام نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع  $y = x^6 - 6x^4 + 1$  را مشخص کنید. ( به هر روشی که می توانید، باید ماکزیمم یا مینیمم بودن نقاط را مشخص کنید. ) ۱۵ نمره

سوال ۷- اگر طول یال یک مخروط برابر ۳ متر باشد، بیشترین مقدار حجم آن چقدر است؟ ۱۵ نمره

سوال ۸- یک تابع اولیه برای تابع  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5} \sin 5x$  بیابید. ۱۵ نمره

موفق باشید

$$x = \frac{-\Delta i \pm \sqrt{(\Delta i)^2 - 4 \times 2 \times 18}}{2 \times 2} = \frac{-\Delta i \pm \sqrt{-25 - 144}}{4} = \frac{-\Delta i \pm \sqrt{-169}}{4} = \frac{-\Delta i \pm 13i}{4} \quad \text{سوال ۱- الف}$$

$$x_1 = 2i, x_2 = -\frac{9i}{2}$$

$$\frac{1}{z} - (\bar{z})^2 = \frac{1}{2+3i} - (2-3i)^2 = \frac{2-3i}{4+9} - (-5-12i) = \frac{2-3i}{13} + 5+12i = \frac{1}{13}(67+153i) \quad \text{ب}$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{سوال ۲- می دانیم:}$$

$$16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x = 16 \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^5 - 20 \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 + 5 \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) \quad \text{روش اول:}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{5it} + 5e^{3it} + 10e^{it} + 10e^{-it} + 5e^{-3it} + e^{-5it}) - \frac{5}{2} (e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}) + \frac{5}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$= \frac{1}{2} (e^{5it} + e^{-5it}) = \cos 5t$$

$$\cos 5t = \frac{1}{2} (e^{5it} + e^{-5it}) = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})^5 - \frac{1}{2} (5e^{3it} + 10e^{it} + 10e^{-it} + 5e^{-3it}) \quad \text{روش دوم:}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})^5 - \frac{5}{2} (e^{3it} + e^{-3it}) - 5(e^{it} + e^{-it})$$

$$= \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})^5 - \frac{5}{2} (e^{it} + e^{-it})^3 + \frac{15}{2} (e^{it} + e^{-it}) - 5(e^{it} + e^{-it})$$

$$= \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})^5 - \frac{5}{2} (e^{it} + e^{-it})^3 + \frac{5}{2} (e^{it} + e^{-it}) = 16 \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^5 - 20 \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 + 5 \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)$$

$$= 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$$

سوال ۳- اگر بخواهیم ناپیوستگی برداشتنی (رفع شدنی) داشته باشیم باید حدهای چپ و راست موجود و برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (-x^2[x]) = -(-4)^2(-5) = 80, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} (3x+b) = -12+b \rightarrow 80 = -12+b \rightarrow b = 92$$

سوال ۴- هر دو حد به کمک قضیه هوپیتال حل می شوند.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{1391}}{x} \quad \text{چون } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{1392}}{x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{می توانیم از قضیه هوپیتال استفاده و حد جدید}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{1390}}{x} \quad \text{داریم دو مرتبه از قضیه هوپیتال استفاده می کنیم. به حد}$$

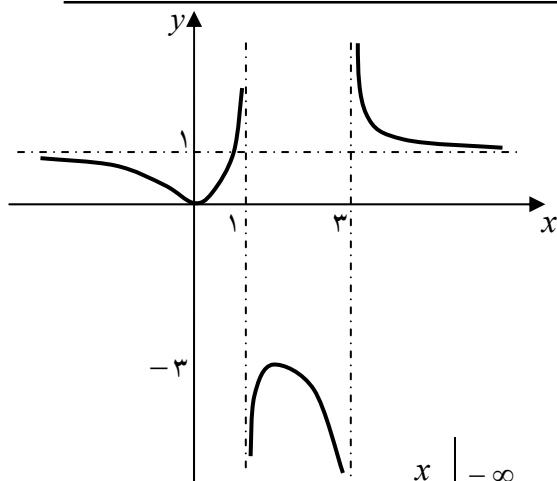
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \quad \text{هوپیتال استفاده می کنیم از توان } \ln x \text{ یک واحد کم می شود اگر این کار را } 1392 \text{ بار تکرار کنیم به حد}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^{1392}}{x} = 0 \quad \text{مقدار آن برابر صفر است. پس داریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) = \frac{0}{0} \quad \text{در مورد حد دوم داریم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \right) \quad \text{برسیم اما باز هم به حالت مبهم رسیدیم و یک بار دیگر از قضیه هوپیتال استفاده می کنیم و داریم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0 \quad \text{بنابر این} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = \frac{0}{2} = 0$$



**سوال ۵-** دامنه این تابع عبارت است از  $D_f = R - \{1, 3\}$

و چون  $\left. \begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 1 \end{array} \right\}$  و  $\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow \pm \infty \end{array} \right\}$  ،  $\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \pm \infty \end{array} \right\}$  این منحنی دارای

دو مجانب قائم  $x=1$  و  $x=3$  و یک مجانب افقی  $y=1$  است.

ریشه های مشتق تابع را به دست می آوریم.

$$y' = \frac{-fx^r + ex}{(x^r - fx + e)^r} \rightarrow -fx^r + ex = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 3/2 \\ y = -3 \end{cases}$$

اکنون جدول تغییرات تابع را کامل می‌کنیم.

$x$	$-\infty$	.		$\searrow$	$\frac{3}{2}$		$\nearrow$	$\infty$
$y'$		-	.	+		+	.	-
$y$	$\searrow$	$\swarrow$	.	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\infty$

اکنون به کمک جدول تغییرات نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

سوال ۶- ریشه‌های مشتق تابع را پیدا می‌کنیم.  $y' = 6x^5 - 24x^3$  اگر  $y' = 0$  آنگاه  $x(x^4 - 4) = 0$

این معادله دارای سه ریشه متمایز است.  $x_1 = 0$  ،  $x_2 = 2$  و  $x_3 = -2$

اکنون مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

$x$	$-\infty$		$-2$		$0$		$2$		$\infty$
$y'$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$y$		$\searrow$	$-31$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$	$-31$	$\nearrow$	

با توجه به اطلاعاتی که در جدول آمده است نقطه  $(0, 1)$  نقطه ماکزیمم و نقاط  $(\pm 2, -31)$  دو نقطه مینییم تابع هستند.

**سوال ۷-** اگر پال ، شعاع قاعده و ارتفاع مخروط ، به ترتیب ، برابر ۳ ،  $r$  و  $h$  باشند آنگاه طبق قضیه فیثاغورس داریم  $۳^۲ = r^۲ + h^۲$

و حجم مخروط برابر است با  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  یعنی :  $V = \frac{1}{3} \pi (9 - h^2) h$  ،  $0 < h < 3$

$V$  یک تابع یک متغیره است و می‌توانیم ماکزیمم آن را محاسبه کنیم.

$$V' = \frac{1}{\sqrt{3}} \pi (1 - \sqrt{3} h^2) \quad , \quad V' = 0 \rightarrow 1 - \sqrt{3} h^2 = 0 \rightarrow h = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

و حجم ماكزیمم مخروط برابر است با :  $V = 2\sqrt{3} \pi$

$$\int f(x)dx = \int (x^r + \frac{1}{x^r} - \frac{1}{\Delta} \sin \Delta x) dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{\Delta} \cos \Delta x + c$$

سوال ۸-